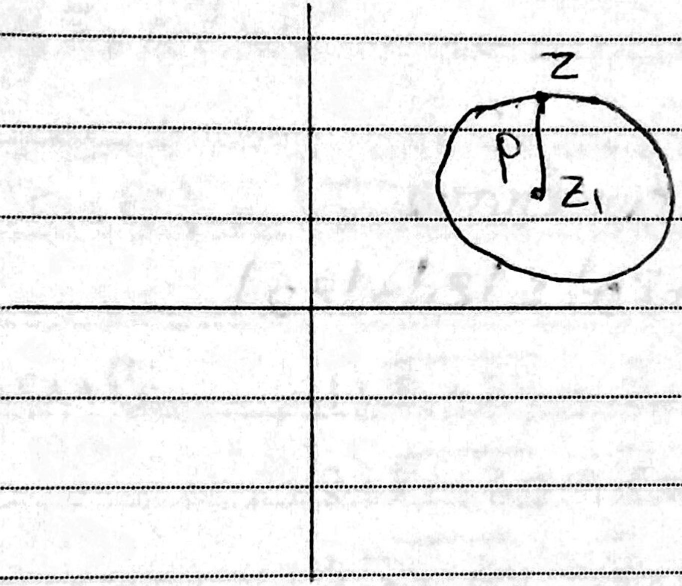
$7+4i$ $7-4i$

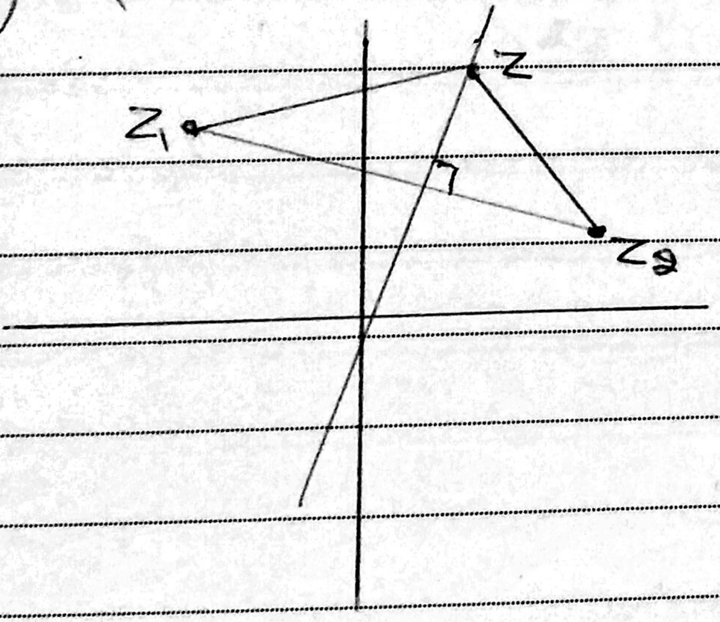
19/10/2017

1.) Βρείτε όλα τα $z \in \mathbb{C}$ τ.ώ $|z-z_1|=\rho$



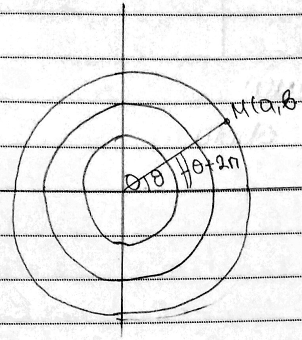
απάν. Είναι όλα τα $z=\alpha+\beta i$ για τα οποία η εικόνα τους είναι σημείο του κύκλου με κέντρο την εικόνα του z_1 κ' ακτίνα ρ.

2.) Βρείτε όλα τα $z \in \mathbb{C}$ τ.ώ. $|z-z_1|=|z-z_2|$ για $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$



Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z τ.ω. $|z-z_1|=|z-z_2|$ ανήκουν στην μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τις εικόνες του z_1, z_2

Ορισμός: Ονομάζουμε όρισμα του μιγαδικού αριθμού $z=\alpha+\beta i$ οποιαδήποτε από τις γωνίες που έχουν αρχική πλευρά την ημιευθεία Ox και τελική πλευρά την ημιευθεία OM, όπου $M(\alpha,\beta)$ είναι η εικόνα του z.



Ορισμός: Πρωτεύων όρισμα του z λέγεται το μοναδικό όρισμα του z που βρίσκεται στο διάστημα. $[0,2\pi)$

Π.χ

$z_1=1$ $\quad z_2=3$ $\quad z_3=1+i$ $\quad z_4=2017+2017i$ $\quad z_5=7i$ $\quad z_6=-1+i$

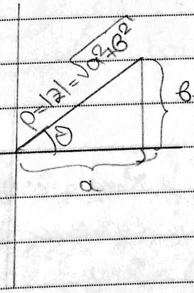
$z_7=-2i$ $\quad$ Πρωτεύων όρισμα $\quad Arg(z_1)=0$, $Arg(z_5)=\pi/2$

$Arg(z_2)=0$, $Arg(z_6)=3\pi/4$

$Arg(z_3)=\pi/4$, $Arg(z_7)=3\pi/2$

$Arg(z_4)=\pi/4$

Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού:



$\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

$\boxed{\eta\mu\theta=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\frac{\beta}{\rho}}$, $\boxed{\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\alpha}{\rho}}$

$\beta=\rho\eta\mu\theta$

$\alpha=\rho\sigma\upsilon\nu\theta$

$z=\alpha+\beta i=\rho\sigma\upsilon\nu\theta+\rho\eta\mu\theta i=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta i)$

$z_1=\alpha_1+\beta_1 i=\rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1+\eta\mu\theta_1 i)$

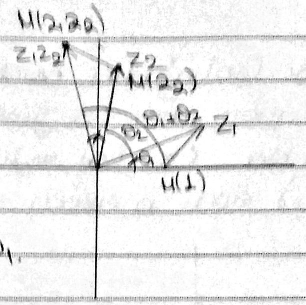
$z_2=\alpha_2+\beta_2 i=\rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2+\eta\mu\theta_2 i)$

$z_1\cdot z_2=\rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1+\eta\mu\theta_1 i)\cdot\rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2+\eta\mu\theta_2 i)=$

$=\rho_1\rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_1+\eta\mu\theta_1 i)(\sigma\upsilon\nu\theta_2+\eta\mu\theta_2 i)=$

$=\rho_1\rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_1\cdot\sigma\upsilon\nu\theta_2-\eta\mu\theta_1\cdot\eta\mu\theta_2+i(\sigma\upsilon\nu\theta_1\,\eta\mu\theta_2+\eta\mu\theta_1\,\sigma\upsilon\nu\theta_2)\ z_2=$

$\rho_1\rho_2\left(\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2)+i\,\eta\mu(\theta_1+\theta_2)\right)$



$$\frac{OM(z_1)}{OM(1)}=\frac{\rho_1}{1}$$

$$\frac{OM(z_1z_2)}{OM(z_2)}=\frac{|z_1z_2|}{|z_2|}=\frac{|z_1||z_2|}{|z_2|}=\frac{\rho_1\cancel{\rho_2}}{\cancel{\rho_2}}=\rho_1$$

Άρα τα τρίγωνα $OM(z_1)M(1)$

και $OM(z_1z_2)M(z_2)$ είναι όμοια.

Αν $z=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)$

$z^2=\rho^2(\sigma\upsilon\nu 2\theta+i\eta\mu 2\theta)$

$z^3=\rho^3(\sigma\upsilon\nu 3\theta+i\eta\mu 3\theta)$

$z^n=\rho^n(\sigma\upsilon\nu n\theta+i\eta\mu n\theta)$

Φυλλάδιο #2

(1) $z^2-3z+2=0$ $\quad\Delta=9-8=1$

$z=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}$ $\begin{cases} z_1=2 \\ z_2=1 \end{cases}$

(2.) $z=x+yi$

$|z^2|=z^2$ $\quad, z^2=x^2+(iy)^2+2xyi=x^2-y^2+2xyi$

$|x^2-y^2+2xyi|=x^2-y^2+2xyi \Rightarrow$

$\sqrt{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}=x^2-y^2+2xyi \Rightarrow$

$\sqrt{x^4+y^4-2x^2y^2+4x^2y^2}=x^2-y^2+2xyi \Rightarrow \sqrt{(x^2+y^2)^2}=x^2-y^2+2xyi \Rightarrow$

$x^2+y^2=x^2-y^2+2xyi$

Άρα $x^2+y^2=x^2-y^2$ και $0=2xy$ $\begin{cases} x=0 \\ \text{ή} \\ y=0 \end{cases}$

(1η περ.) $x=0$ $\quad x^2+y^2=x^2-y^2$

$2y^2=0 \Rightarrow y=0$ $\quad$ Άρα $z=0$

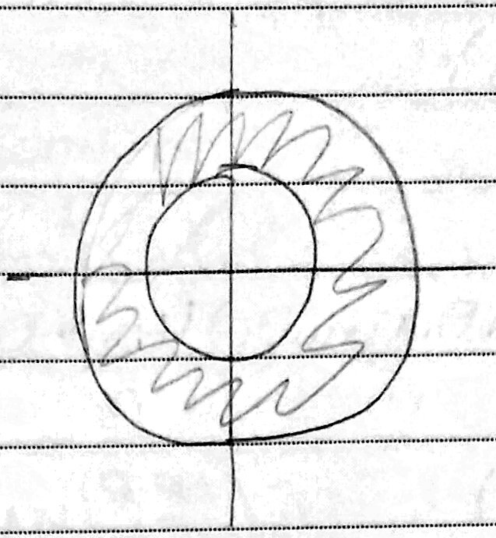
(2η περ.) $y=0$ $\quad x^2+y^2=x^2-y^2$

$x^2=x^2,\ x\in\mathbb{R}$ $\quad z=x+0i$

(3) $|z|=1$ κυκλος με $K(0,0)$ κ' $\rho=1$

$|z-i|=1$ κυκλος με $K(0,1)$ κ' $\rho=1$

$1<|z|<2$



(4): $|z|=1$, $A=\{2z+1 : z\in\mathbb{C}, |z|=1\}$

$w=2z+1 \Rightarrow 2z=w-1 \Rightarrow z=\frac{w-1}{2} \Rightarrow |z|=1 \Rightarrow \left|\frac{w-1}{2}\right|=1$

$|w-1|=2$ κύκλος